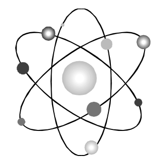
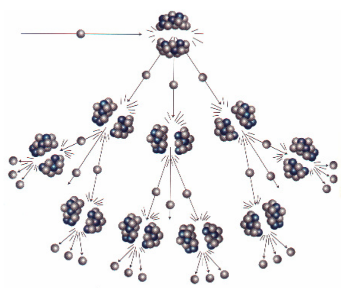
Unidad 4

Función Exponencial

Concepto

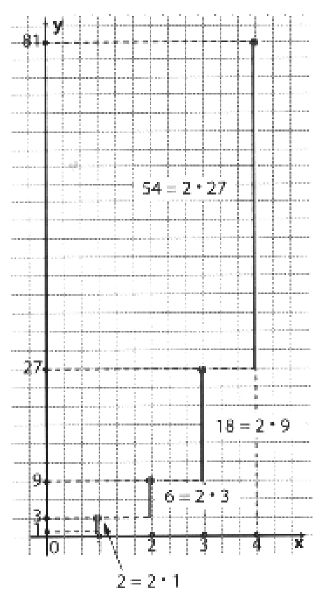


Al bombardear un átomo de uranio con neutrones, su núcleo se divide en dos núcleos más livianos, liberando energía y 3 neutrones. Bajo ciertas condiciones, es decir, si existe una *masa crítica*[1] de uranio, se inicia una reacción en cadena: cada uno de los neutrones liberados choca al núcleo de otro átomo, al que dividen en dos núcleos, liberando en cada colisión gran cantidad de energía y tres neutrones, y así sucesivamente, como muestra la figura.



Si construimos una tabla de valores para la función que relaciona la cantidad de neutrones liberados en cada choque, con el número de choque y al choque, o momento inicial, con el neutrón que bombardea el primer átomo y lo graficamos, obtenemos:

x: Nº de choque	F(x)= Cantidad de neutrones
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
.....	......
x	$\boldsymbol{3^x}$



Una función es exponencial si se expresa de la forma $f(x) = k \cdot a^x$. Siendo ***a*** un número real positivo distinto de 1 y k un número real distinto de cero $(k \neq 0)$.

[1] Se llama ***masa crítica*** de uranio a la cantidad de masa mínima que se necesita para mantener una reacción en cadena.

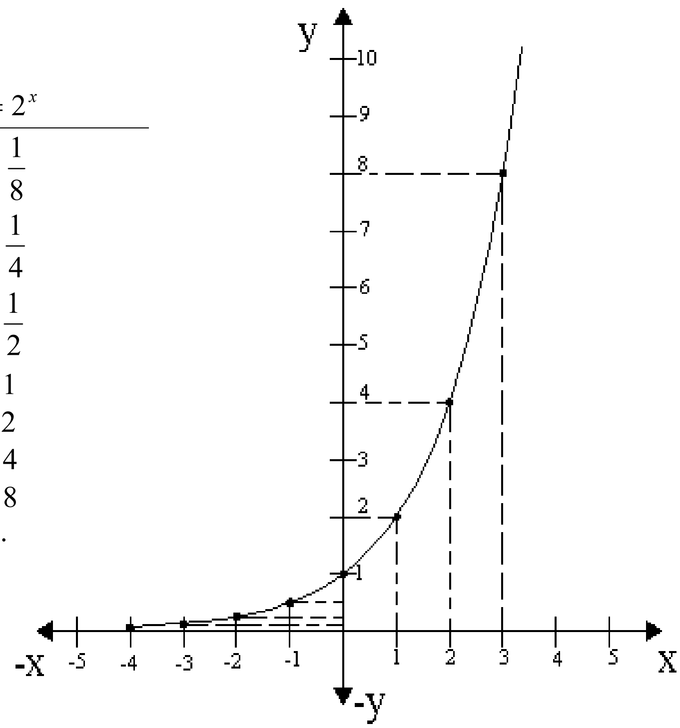
a se denomina *base* y *k*, coeficiente de la función exponencial proviene de que la variable figura en el exponente.

Analizaremos ahora la función $f(x) = a^x$ donde $(k = 1)$

Para ello graficaremos la siguiente función:

$$f(x) = 2^x$$

X	$f(x) = 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
.....	....



El dominio natural de la función exponencial es el conjunto de los números Reales $dom(f) = \Re$.

Mientras que la imagen son los reales positivos $\mathrm{Im}(f) = \Re > 0$, siendo el eje de las abscisas una ***asíntota***[2] ***horizontal***.

La función es creciente[3] y pasa por el punto $(0,1)$, que es la ordenada al origen.

Al tener asíntota en el eje de las abscisas, la función no tiene raíces.

Qué pasará ahora con la función

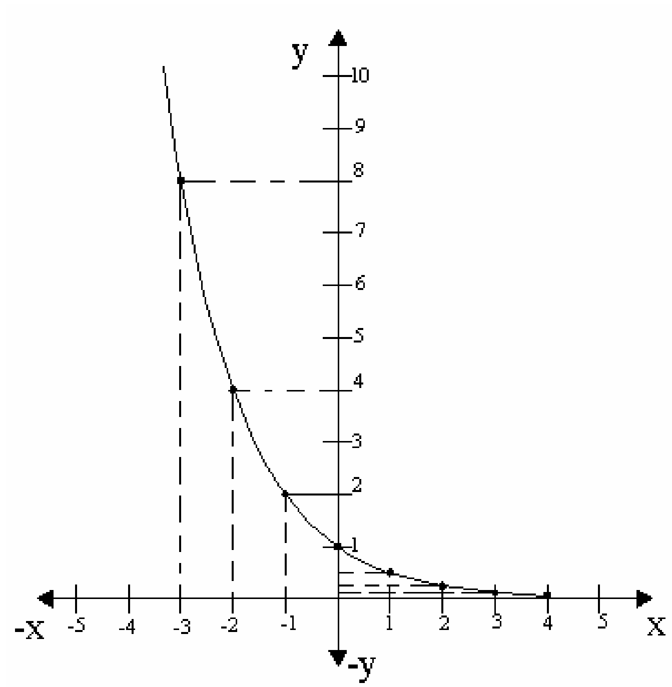
$$f(x) = 2^{-x} \text{ o } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Es decir $0 < a < 1$

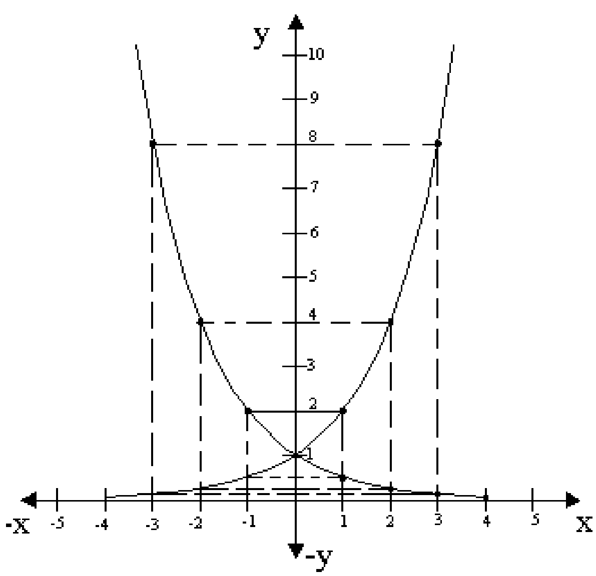
[2] Asíntota es una recta a la cual la curva se aproxima indefinidamente, sin llegar a tocarla

[3] ES crecimiento vertiginoso se denomina ***crecimiento exponencial***

x	$f(x)=2^{-x}$
-3	$2^{-(-3)}=8$
-2	$2^{-(-2)}=4$
-1	$2^{-(-1)}=2$
0	$2^{-0}=1$
1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$
2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$
3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$
....	....



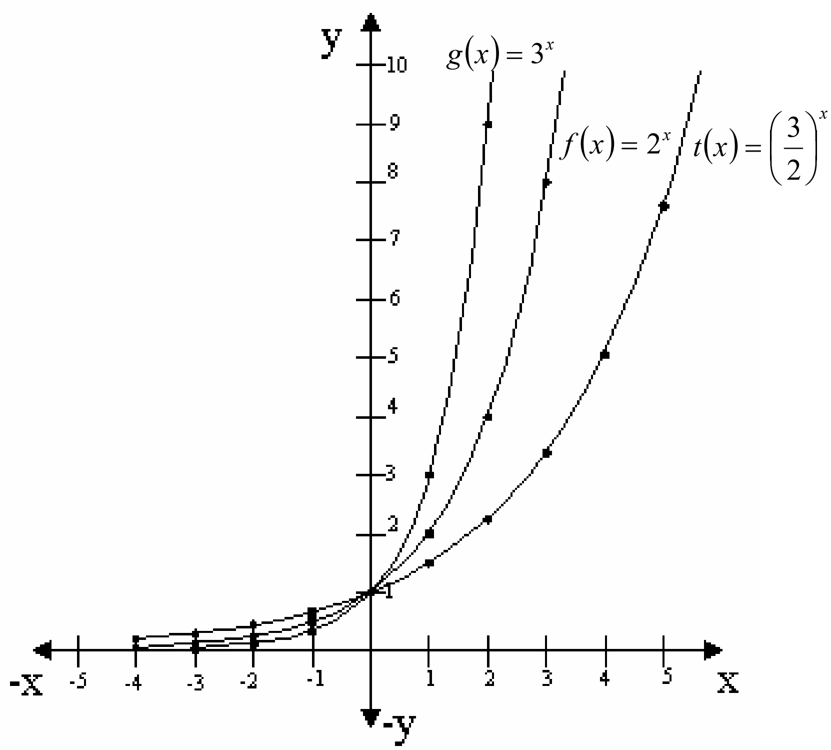
Como puedes observar, la función ahora es decreciente, pero manteniéndose las mismas características del dominio, imagen, ordenada al origen y asíntota horizontal.
Es decir que ambas son simétricas con respecto al eje de las ordenadas.



Analizaremos el comportamiento de las funciones $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$ y $t(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, es decir con $a>1$

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=3^x$	$t(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$
-3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$3^{-3}=\frac{1}{27}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$
-2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$3^{-1}=\frac{1}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$
0	$2^{0}=1$	$3^{0}=1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{0}=1$
1	$2^{1}=2$	$3^{1}=3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}=\frac{3}{2}$
2	$2^{2}=4$	$3^{2}=9$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$
3	$2^{3}=8$	$3^{3}=27$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$

Si lo graficamos, obtenemos:

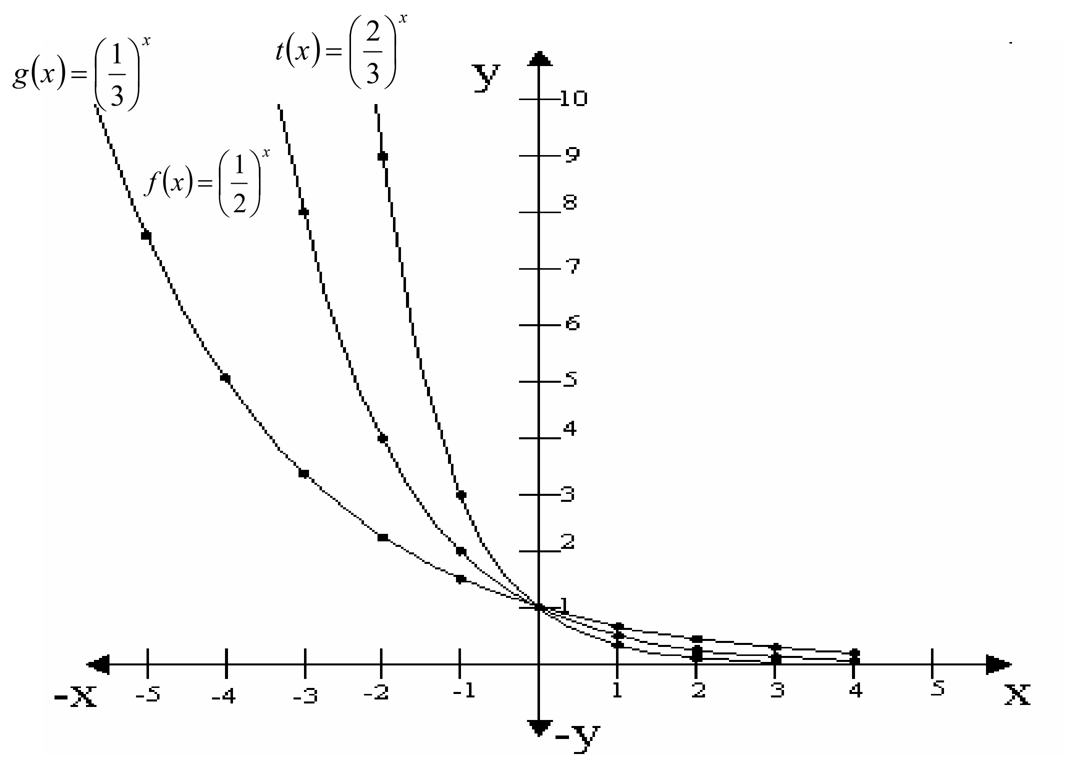


Los gráficos de las funciones de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 1$ tienen características comunes:

- Las curvas tienen la misma ordenada al origen y es el punto (0;1).
- Las curvas son crecientes, y crecen tanto más rápido cuanto mayor sea la base.
- La imagen toma valores positivos , es decir $\operatorname{Im} f = \Re > 0$
- La curva no corta al eje de las abscisas, osea que tiene la misma asíntota y esta es ***y = 0***

Que consideraciones podemos hacer si la base esta comprendida entre 0 y 1, es decir $0 < a < 1$.

Veamos los siguientes gráficos:



Los gráficos de las funciones de la forma $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$ tienen características comunes:

- Las curvas tienen la misma ordenada al origen y es el punto (0;1).
- Las curvas son decrecientes, y decrecen tanto más rápido cuanto menor sea la base.
- La imagen toma valores positivos , es decir $\operatorname{Im} f = \Re > 0$
- La curva no corta al eje de las abscisas, osea que tiene la misma asíntota y esta es ***y = 0***

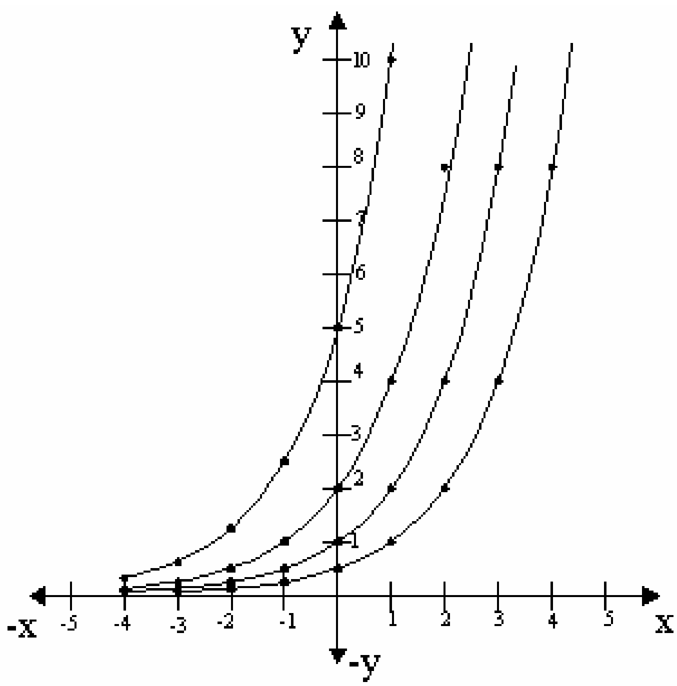
Gráfico de funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$ **con** $a > 1$ **y** $k > 0$

Estudiaremos que influencia tiene el coeficiente de la función exponencial (***k***), en la función $f(x) = 2^x$, con k igual a 5; 2; $\frac{1}{2}$.

Para ello haremos la siguiente tabla.

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=5\cdot 2^x$	$h(x)=2\cdot 2^x$	$t(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2^x$
-3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
-2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
0	$2^0=1$	5	2	$\frac{1}{2}$
1	$2^1=2$	10	4	1
2	$2^2=4$	20	8	2
3	$2^3=8$	40	12	4

Graficando, obtenemos

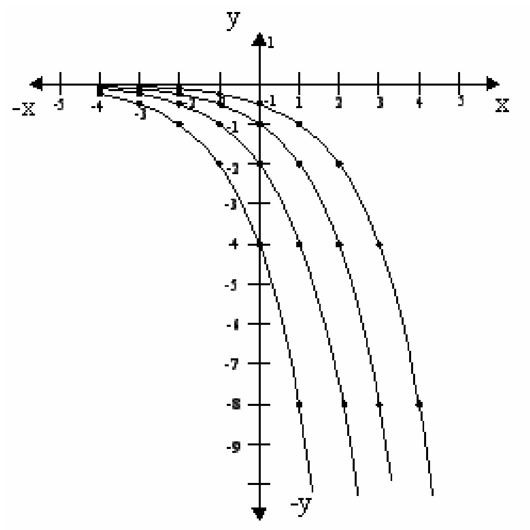


Si analizamos este gráfico, veremos que

- Las curvas cortan al eje de las ordenadas en el punto $(0;k)$, o sea es la ordenada al origen
- Las curvas son decrecientes, y decrecen tanto más rápido cuanto menor sea la base.
- La variable ***y*** toma todos los valores positivos, es decir, $\mathrm{Im}(f)=\Re>0$.

- Las curvas no cortan al eje de las abscisas, es decir no tienen raíces reales; cuando los valores positivos de ***x*** aumentan, los correspondientes valores de ***y*** se acercan a cero, pero no alcanzan nunca ese valor.

Respecto de las funciones exponenciales $f(x) = k \cdot a^x$, con $k < 0$, presentamos el siguiente gráfico para ***k*** igual a -1; -2 y -4, como ejemplo.



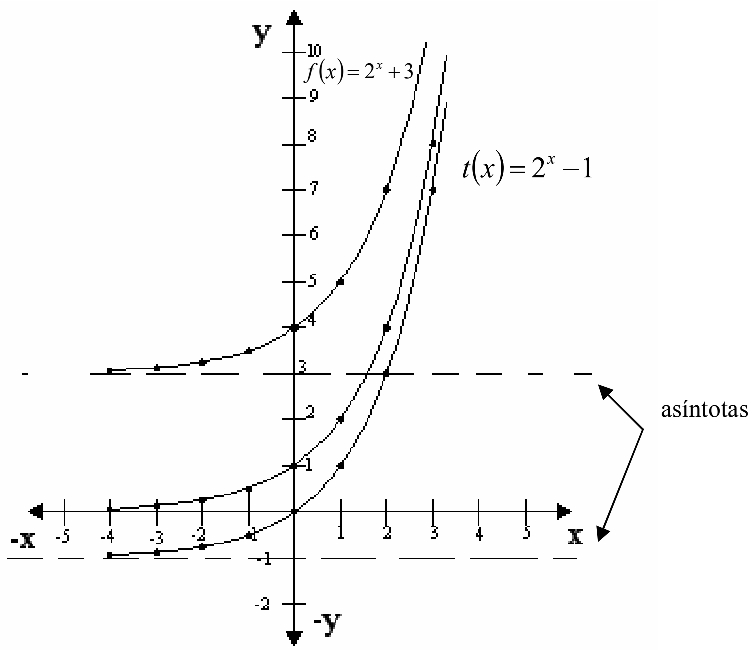
Como puedes observar posee características similares al anterior.
¿Podrías decir cuales son las diferencias?

Traslaciones de las funciones exponenciales

Traslación vertical
La función exponencial de la forma $f(x) = a^x + b$, es una traslación vertical de la función genérica $g(x) = a^x$.
Para ello graficaremos las siguientes funciones exponenciales: $f(x) = 2^x + 3$; $t(x) = 2^x - 1$, y su función genérica $g(x) = 2^x$.

x	$g(x) = 2^x$	$f(x) = 2^x + 3$	$t(x) = 2^x - 1$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 3 = \frac{25}{8}$	$\frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$	$-\frac{3}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$	4	0
1	$2^1 = 2$	5	1
2	$2^2 = 4$	7	3
3	$2^3 = 8$	11	7

Si graficamos estas funciones exponenciales, obtenemos:



Comparando los gráficos, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- La función se ha desplazado b unidades hacia arriba o abajo, no modificando su forma.
- La ordenada al origen es el punto $(0;b)$
- La asíntota es la función $y=b$.
- El dominio es el conjunto de los números reales y la imagen son los números reales mayores a ***b*** $\mathrm{Im}(f)=\Re>b$.

Hacer las consideraciones para los distintos valores de ***k***.

Traslación horizontal

La función exponencial de la forma $f(x)=a^{(x-c)}$, es una traslación horizontal de la función genérica $g(x)=a^x$.

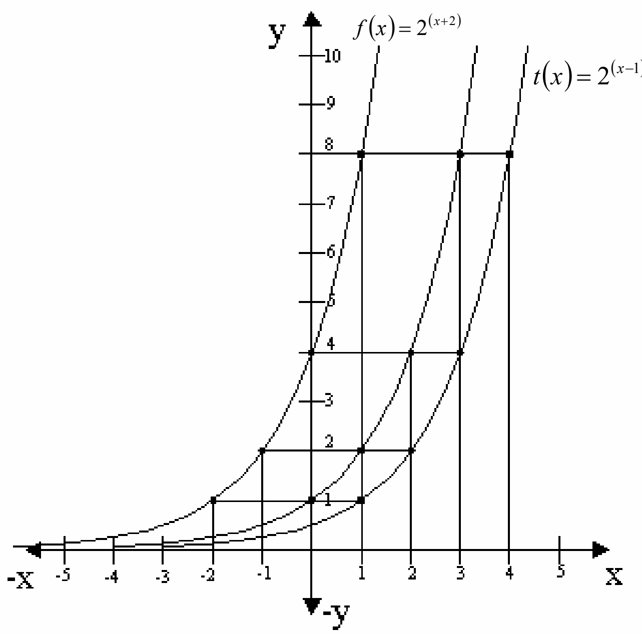
Para ello graficaremos las siguientes funciones exponenciales: $f(x)=2^{(x+2)}$; $t(x)=2^{(x-1)}$, y su función genérica $g(x)=2^x$.

Para simplificar el gráfico, modificaremos, solamente, los valores de las abscisas para obtener el mismo valor de la función

x	$g(x)=2^x$	$f(x)=2^{(x+2)}$	$t(x)=2^{(x-1)}$
-3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
-2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{8}$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$

0	$2^0 = 1$	4	$\frac{1}{2}$
1	$2^1 = 2$	8	1
2	$2^2 = 4$	16	2
3	$2^3 = 8$	32	4

Si graficamos estas funciones exponenciales, obtenemos:



Ahora, analizando los gráficos, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- La función se ha desplazado ***c*** unidades hacia la derecha o izquierda, en signo contrario al valor de ***c***, no modificando su forma.
- La asíntota es la función $y = 0$, por lo tanto no tiene raíces.
- El dominio es el conjunto de los números reales y la imagen son los números reales mayores a ***0,*** $\mathrm{Im}(f) = \Re > 0$.

Ejercicio

1. Hacer las consideraciones para los distintos valores de ***k***.
2. ¿Cómo sería una función exponencial con dos desplazamientos, uno horizontal y el otro vertical?

Ecuaciones exponenciales

*Una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente, se llama **ecuación exponencial**.*

Para entender, observa el siguiente problema:
Queremos averiguar el tiempo que tarda en duplicarse las amebas en un cierto cultivo. Para ello hacemos la siguiente experiencia:
Colocamos cuatro amebas en cultivo y, al cabo de tres días justos, contamos las que hay: 16.384. Nos preguntamos cuántas veces se han duplicado.

Si planteamos la expresión, tenemos:

$$4 \cdot 2^{3x} = 16.384$$

Donde ***x*** es el número de particiones que se producen cada día.
Como ves, esta es una ecuación exponencial y podrás resolverla si recuerdas las propiedades de las potencias y de las raíces, que se estudiaron en años anteriores.

Ahora vamos a resumirlas:

1.- $a^0 = 1$	2.- $a^1 = a$
3.- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	4.- $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$
5.- $a^p \cdot b^p = \left(a \cdot b\right)^p$	6.- $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$
7.- $\dfrac{1}{a^p} = a^{-p}$	8.- $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
9.- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	10.- $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

Una potencia cuyo exponente es una fracción de denominador par(por ejemplo $a^{\frac{3}{4}}$), no tiene sentido para valores negativos de la base ***a***.
Por eso, cuando se trabaja con funciones o ecuaciones exponenciales, *la base será siempre un número positivo*.

Si volvemos al problema anterior, para resolverla, es conveniente expresar ambos miembros en potencias de base dos

$$4 \cdot 2^{3x} = 16.384$$
$$2^2 \cdot 2^{3x} = 2^{14}$$
$$2^{(2+3x)} = 2^{14}$$

Por propiedad de producto de potencias de igual base

Si aplicamos propiedad cancelativa, la base 2, tenemos:

$$2 + 3x = 14$$
$$3x = 14 - 2$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Hay muchas formas de ecuaciones exponenciales, pero siempre que se pueda, será conveniente expresar como potencia de la misma base.
Ahora resolveremos otro tipo de ecuaciones exponenciales:

1. $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$$3^{1-x^2} = 3^{-3}$$

Trabajando con los exponentes se plantea

$$1 - x^2 = -3$$
$$x^2 = 3 + 1$$

$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

2. $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$

$\dfrac{2^{2(x-1)}}{2^{x+2}} = 2^7$ Expresamos todos los números en potencias de 2

$2^{2(x-1)-(x+2)} = 2^7$ Por propiedad del cociente de potencias de igual base

Trabajando con los exponenciales se obtienes

$$2(x-1)-(x+2) = 7$$
$2x - 2 - x - 2 = 7$ Aplicamos propiedad distributiva
$$x - 4 = 7$$
$$x = 7 + 4$$
$$x = 11$$

3.- $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{30}$

4.- $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 100$

Estas ecuaciones exponenciales no se pueden resolver por el método descrito anteriormente, por no poder descomponer los números 100 y $\dfrac{1}{30}$ en potencias de base 2
Las resolveremos, cuando terminemos de ver los siguientes temas.

Número e

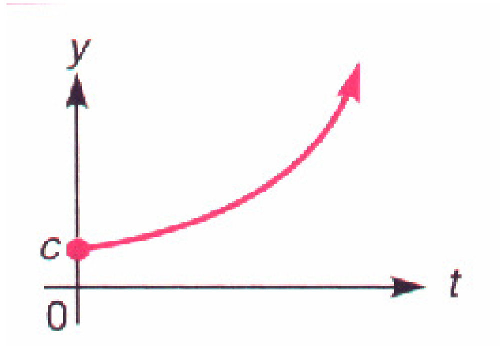
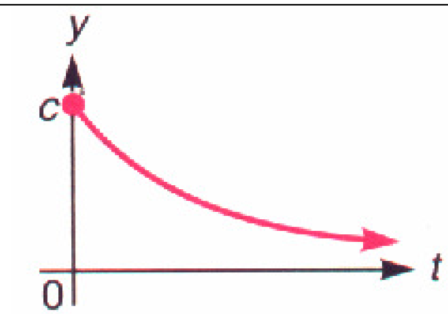
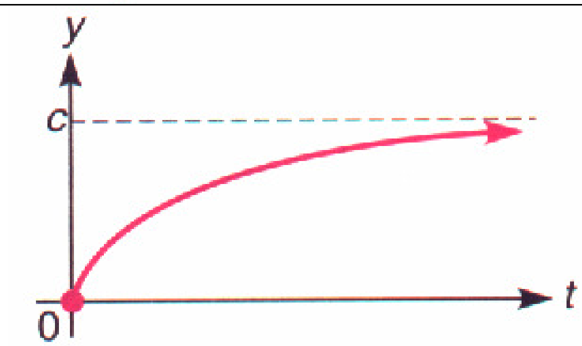
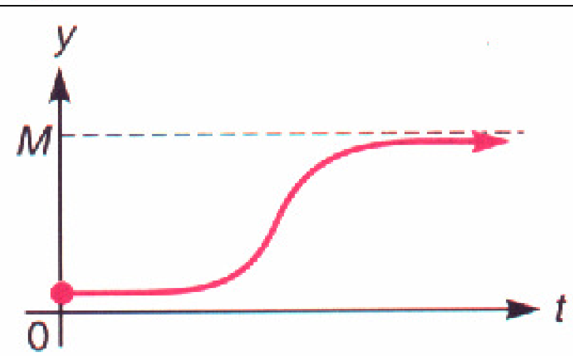
En matemáticas, número de gran importancia, tan sólo comparable a la de π (pi), por su gran variedad de aplicaciones. El número ***e*** suele definirse como el valor que toma la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende hacia infinito. Algunos valores de esta expresión para determinados valores de la n se muestran en la tabla siguiente:

VALOR NUMÉRICO DE $(1 + 1/n)^n$ PARA VALORES CRECIENTES DE n

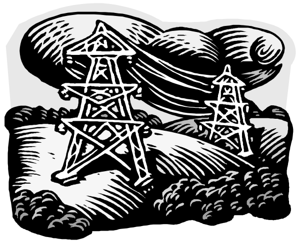
n	$(1 + 1/n)^n$	Valor numérico
1	$(1 + 1/1)^1$	2,000
2	$(1 + 1/2)^2$	2,250
3	$(1 + 1/3)^3$	2,369
5	$(1 + 1/5)^5$	2,489
10	$(1 + 1/10)^{10}$	2,594
20	$(1 + 1/20)^{20}$	2,653
40	$(1 + 1/40)^{40}$	2,684
50	$(1 + 1/50)^{50}$	2,691
100	$(1 + 1/100)^{100}$	2,705
1.000	$(1 + 0,001)^{1.000}$	2,717
10.000	$(1 + 0,0001)^{10.000}$	2,718
∞	....	2,71828...

Observando la columna de la derecha de la tabla anterior, se puede ver que a medida que n crece el valor de la expresión se aproxima, cada vez más, a un valor límite. Este valor es 2,7182818285.....
La interpretación geométrica no es tan sencilla como el número π.
Aparece en la función exponencial e^x, es la única función cuyo incremento es igual

a su propia magnitud, y es por tanto la función básica de ecuaciones que describen crecimiento u otros tipos de cambios.
Estas funciones aparecen en los problemas de población, desintegración, interés bancario, etc., como vemos en el siguiente cuadro.

Aplicación	Ecuación	Gráfica	Ejemplos prácticos
Crecimiento ilimitado	$y = c \cdot e^{kt}$ $c, k > 0$		Crecimiento a corto plazo de poblaciones. Inversiones de capital a interés continuo.
Decrecimiento exponencial	$y = c \cdot e^{-kt}$ $c, k > 0$		Desintegración reactiva. Circuitos Eléctricos. Absorción de luz.
Crecimiento limitado	$y = c \cdot \left(1 - e^{-kt}\right)$ $c, k > 0$		Aprendizaje. Ritmo de ventas. Punto de saturación
Crecimiento logístico	$y = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-kt}}$ $c, k, M > 0$		Crecimiento a largo plazo de poblaciones. Ventas de productos nuevos.

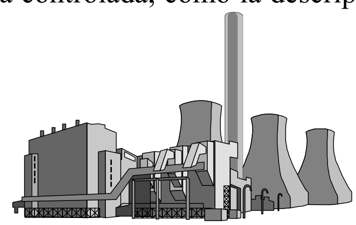
En geometría, el número ***e*** es un componente necesario para describir muchas curvas, como la catenaria $f(x) = e^x + e^{-x}$, la supuesta forma de una cuerda o cadena suspendida por sus extremos, como vemos en los tendidos eléctricos.



En el estudio de los números imaginarios, el número e aparece en la ecuación extraordinaria $i^{-i} = \sqrt{e^{\pi}}$.

Logaritmo

En un reactor nuclear, se produce una reacción en cadena controlada, como la descripta en la situación inicial.
Nos interesa saber en qué número de choque fueron liberadas ciertas cantidades de neutrones: 243; 500; 59.049; 70.000; 14.348.907.

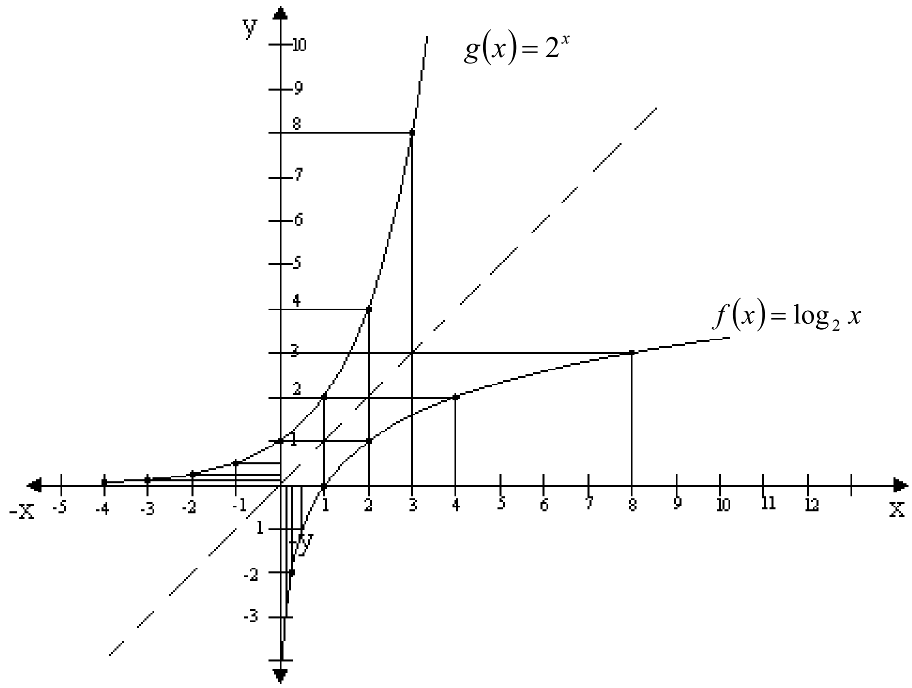


Revisa la tabla, correspondiente a la fórmula $f(x) = 3^x$, que relaciona el número de choque con la cantidad de neutrones liberados.

x: Nº de choque	F(x)= Cantidad de neutrones
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
5	$243 = 3^5$
6	$729 = 3^6$
7	$2187 = 3^7$
8	$6561 = 3^8$
9	$19.683 = 3^9$
10	$59.049 = 3^{10}$
......	......
x	$\boldsymbol{3^x}$

Como ves, los valores del número de choque para 243; 59.049 son 5 y 10 respectivamente.
El número 500 no figura en la tabla, pero podemos decir que está comprendido entre el quinto y sexto choque, se puede asegurar que no es potencia entera de 3.
Por lo tanto, con ningún número de choque se libera esa cantidad.
Los números 70.000 y 14.348.907 no figuran en la tabla anterior y son mayores al décimo choque, por lo tanto habría que continuar la tabla.

Nos preguntamos ahora, como podemos despejar x de una expresión $2^x = k$.
Se podría hacer si se conociera una función inversa de $g(x) = 2^x$, como puedes ver en la siguiente figura.



Esta nueva función, se llama función logarítmica de base 2, y se expresa así:

$$f(x)=\log_2 x$$

Ahora podemos decir que si $2^x = k$ entonces, lo que significa que ***x*** es la ordenada de la función, cuando ***k*** es la abscisa

En general, $f(x)=\log_a x$ es la función inversa de $g(x)=a^x$

Vamos a definir logaritmo:

Logaritmo de un número, respecto de una base dada, es el exponente a que hay que elevar la base para obtener el número

En símbolo

$$\boxed{\log_a y = x \iff a^x = y}$$

El número ***a*** se denomina *base*, y el número ***y*** se denomina *argumento* del logaritmo.

Ejemplos:

1. $\log_3 81 = 4 \iff 3^4 = 81$
2. $\log_5 25 = 2 \iff 5^2 = 25$

Propiedades de los logaritmos

1. De dos números reales distintos tiene mayor logaritmo el mayor de esos números, con respecto a la misma base

$$m > n \Rightarrow \log_a m > \log_a n$$

$$16 > 8 \Rightarrow \log_2 16 > \log_2 8$$

2. Todo número real no positivo no tiene logaritmo en el conjunto de los números reales
$$m < 0 \Rightarrow \log_a m = \nexists$$

3. El logaritmo, en cualquier base ***a***, de 1 es igual a cero
$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

4. Para toda base, el logaritmo de la base es igual a 1
$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

5. El logaritmo de una potencia de la base es el exponente de dicha potencia
$$\log_a a^n = n \Leftrightarrow a^n = a^n$$

6. El logaritmo de un producto de dos o más factores, respecto de cualquier base, es igual a la suma de los logaritmos de esos factores, respecto de la misma base.
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
Demostración:
Supongamos que
$$\log_a x = m \Leftrightarrow a^m = x$$
$$\log_a y = n \Leftrightarrow a^n = y$$
$$x = a^m$$
$$y = a^n$$
Si multiplicamos
$$x \cdot y = a^m \cdot a^n$$
$$x \cdot y = a^{m+n}$$
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a \left(a^{m+n}\right)$$
Aplicamos logaritmo en base a en ambos miembros
$$\log_a (x \cdot y) = m + n$$
Por propiedad 5

Pero por definición
$$m = \log_a x$$
$$n = \log_a y$$
Reemplazando
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

7. El logaritmo de un cociente entre números reales positivos, respecto a cualquier base, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo divisor, respecto de la misma base.
$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
Demostración:
Supongamos que
$$\log_a x = m \Leftrightarrow a^m = x$$
$$\log_a y = n \Leftrightarrow a^n = y$$

$$x = a^m$$
$$y = a^n$$

Si dividimos

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n}$$

Aplicamos logaritmo en base a en ambos miembros

$$\frac{x}{y} = a^{m-n}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(a^{m-n}\right)$$

Por propiedad 5

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n$$

Pero por definición

$$m = \log_a x$$
$$n = \log_a y$$

Reemplazando

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

8. El logaritmo de toda potencia de un número real positivo es igual al exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log_a (x)^{\mathrm{n}} = \mathrm{n} \cdot \log_a x$$

Demostración

Suponemos que $m = \log_a x$

Entonces

$$x = a^m$$

Elevamos a la potencia "***n***"

$$x^n = \left(a^m\right)^n$$

$$x^n = a^{m \cdot n}$$

Aplicamos logaritmo de base a

$$\log_a\left(x^n\right) = \log_a\left(a^{n \cdot m}\right)$$

Por propiedad 5

$$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot m$$

Por definición de ***m***

$$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a(x)$$

9. El logaritmo de la raíz enésima de un número real positivo es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz

$$\log_a\left(\sqrt[n]{\mathrm{x}}\right) = \frac{1}{\mathrm{n}} \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\sqrt[n]{\mathrm{x}}\right) = \frac{\log_a x}{\mathrm{n}}$$

Demostración

Sabemos que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Entonces

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Por propiedad 9

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\cdot\log_a x$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\log_2(8\cdot 4\cdot 32) &= \log_2 8+\log_2 4+\log_2 32\\ &= 3+2+5\\ &= 10\end{aligned}$$

Sabiendo que $\log_2 10 = 3{,}32$

Calcular $\log_2 1{,}6$

$$\begin{aligned}\log_2 1{,}6 &= \log_2\left(\frac{16}{10}\right)\\ &= \log_2 16-\log_2 10\\ &= 4-3{,}32\\ &= 0{,}68\end{aligned}$$

Calcular $\log_2\left(\sqrt[7]{0{,}064}\right)$

$$\begin{aligned}\log_2\left(\sqrt[7]{0{,}064}\right) &= \log_2(0{,}064)^{\frac{1}{7}}\\ &= \frac{1}{7}\log_2\left(\frac{64}{1000}\right)\\ &= \frac{1}{7}(\log_2 64-\log_2 1000)\\ &= \frac{1}{7}(\log_2 2^6-\log_2 10^3)\\ &= \frac{1}{7}(6\cdot\log_2 2-3\cdot\log_2 10)\\ &= \frac{1}{7}(6-9{,}966)\\ &= -0{,}57\end{aligned}$$

Logaritmos decimales y naturales

La fórmula $f(x)=\log_a x$, con dominio e imagen al conjunto de los números reales, define, para cada valor de a, una función.

Se expresa, también, que esa fórmula, para cada valor de ***a*** define un sistema de logaritmo.

De todos esos sistemas nos interesa, en particular, el de los logaritmos de base 10, definido por la fórmula:

$$f(x)=\log_{10} x$$

o más simplemente:

$$f(x)=\log x$$

El sistema recibe el nombre de sistema de logaritmo *decimales, vulgares* o de *Briggs*[4].
Este sistema tiene la particularidad que:

$$\begin{aligned} &\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1 \\ &\log 10 = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 10 \\ &\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \\ &\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000 \end{aligned}$$

Si queremos calcular el logaritmo de 300, como este número está comprendido entre 100 y 1000, deducimos que su logaritmo está entre 2 y 3.
Por lo tanto, $\log 300$ es un número decimal con su parte entera 2 y una parte decimal que no conocemos y no podemos calcularla ahora.
Más adelante veremos que:

$$\log 300 = 2{,}47712$$

La parte entera del logaritmo recibe el nombre de ***característica*** y la parte decimal se distingue con el nombre de ***mantisa***.
La característica tiene la particularidad de que es un número igual a la cantidad de cifras enteras menos 1 para los logaritmos de números mayores que 1.
Que sucede ahora con un numero positivo menor que 1

$$\begin{aligned} &\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10} \\ &\log 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = -2 \Leftrightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100} \\ &\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1000} = -3 \Leftrightarrow 10^{-3} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Y la característica del logaritmo positivo, menor que la unidad, tiene un número de unidades negativas igual al número que expresa el lugar que ocupa la primera cifra significativa del número después de la coma decimal.
Para la determinación de la mantisa podemos usar la calculadora científica o tablas realizadas.
Además podemos decir que *"la mantisa del logaritmo de un número es la misma mantisa del logaritmo del número que se obtiene al multiplicar o dividir al primer número por una potencia de 10, de exponente natural"*.

$$\begin{aligned} mantisa\ (\log A) &= mantisa\ (\log(A \cdot 10)) \\ &= mantisa\ (\log(a : 10)) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} mantisa\ (\log 20) &= mantisa\ (\log 200) \\ &= mantisa\ (\log(2)) \\ &= 30103 \end{aligned}$$

[4] Matemático inglés Henry Briggs, que compiló la primera tabla de logaritmos comunes (los de base 10)

Otros logaritmos que se utilizan con mucha frecuencia son los logaritmos naturales $(\ln)$, o neperianos[5], cuya base es el número ***e***, visto anteriormente.

Cambio de base

Como sabemos, los logaritmos decimales y naturales se pueden calcular por calculadora científica. ¿Podremos calcular el logaritmo de cualquier base por media de esta?
Para responder esta pregunta, analizaremos las siguientes relaciones:
$\log_a x = m \Rightarrow a^m = x$
Si aplicamos logaritmo de otra base, obtenemos

$$\log_b \left(a^m\right) = \log_b x$$
$$m \cdot \log_b a = \log_b x$$

Despejando ***m***:

$$m = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

El logaritmo de un número en el nuevo sistema es igual al recíproco del logaritmo de la nueva base, multiplicado por el logaritmo del número, tomados estos dos logaritmos del sistema primitivo.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} \log_2 1000 &= \frac{\log 1000}{\log 2} \\ &= \frac{3}{0{,}30103} \\ &= 9{,}96578 \end{aligned}$$

Funciones logarítmicas

Llamamos función logarítmica a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = \log_a x \ \left(\forall \ x > 0; \quad a \in \Re; \quad a \neq 1\right)$$

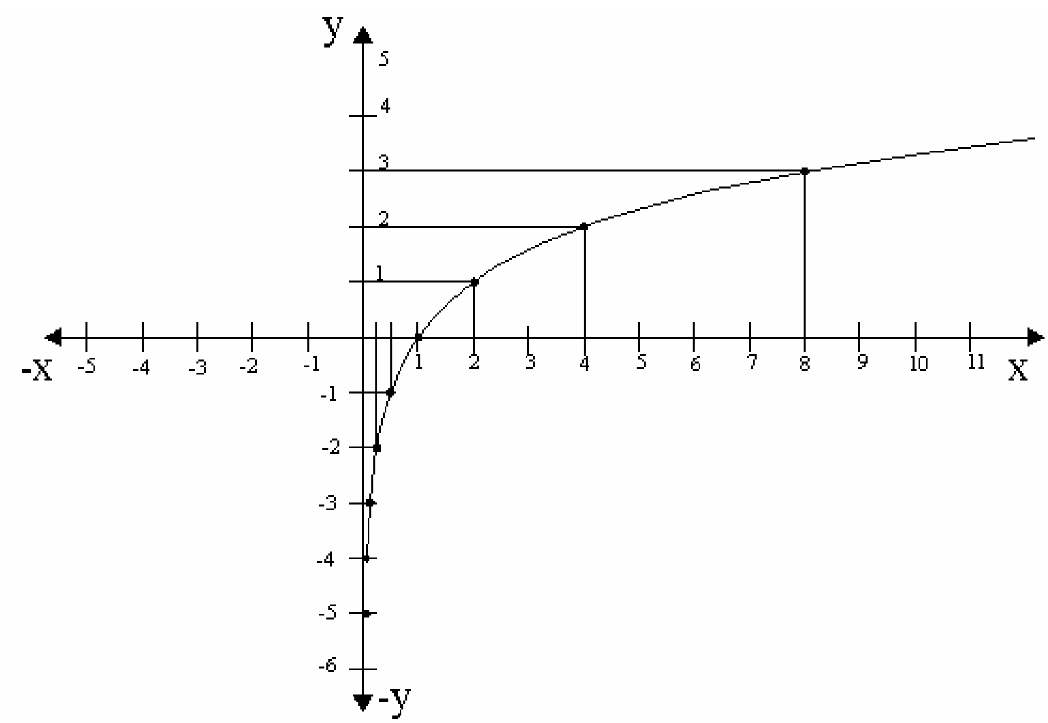
Ampliando más el concepto podemos decir que: "Una función es logarítmica si se expresa de la forma $f(x) = k \cdot \log_a x$. Siendo ***a*** un número real distinto de 1 y k un número real distinto de cero $(k \neq 0)$.
k se denomina coeficiente de la función logarítmica proviene de que la variable figura en el exponente.
Analizaremos ahora la función $f(x) = \log_a x$

Para ello graficaremos la siguiente función:

$$f(x) = \log_2 x$$

[5] Es en homenaje al matemático escocés John Napier, al que se atribuye la creación del concepto de logaritmo.

x	$f(x)=\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



El dominio natural de la función logarítmica es el conjunto de los números Reales positivos $\left(domf = \Re^{+}\right)$.

Mientras que la imagen son los reales $(\operatorname{Im} f = \Re)$, siendo el eje de las ordenadas una ***asíntota vertical***.

La función es creciente y pasa por el punto $(1,0)$, que es la abscisa al origen.

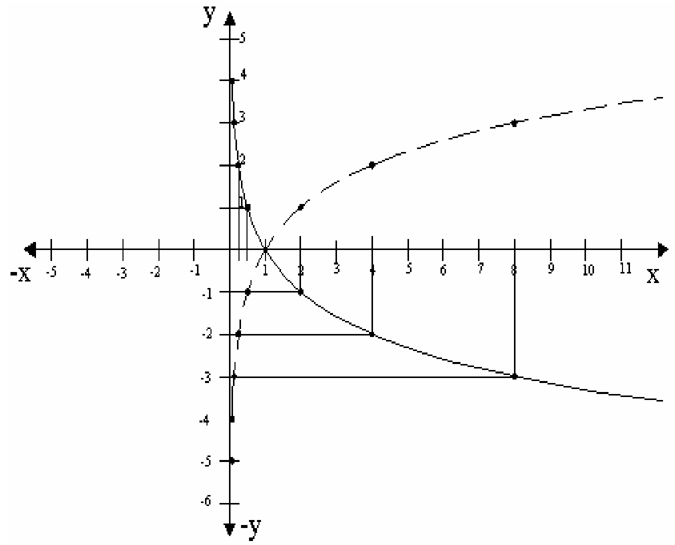
Al tener asíntota en el eje de las ordenadas, la función no tiene ordenada al origen.

Qué pasará ahora con la función

$$f(x)=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x \quad \text{o} \quad f(x)=\log_2\left(x^{-1}\right)$$

Es decir $0 < a < 1$

x	$f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$
8	-3
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



Como puedes observar, la función ahora es decreciente, pero manteniéndose las mismas características del dominio, imagen, raíz y asíntota vertical.
Es decir que ambas son simétricas con respecto al eje de las abscisas.

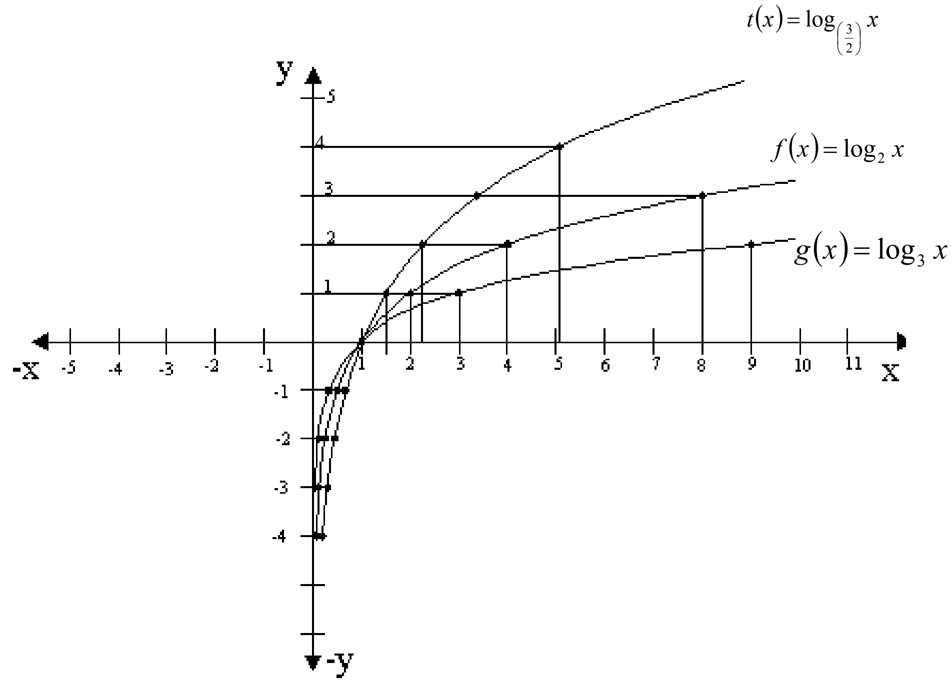
Analizaremos el comportamiento de las funciones $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3 x$ y $t(x) = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} x$, es decir con $a > 1$

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

x	$g(x) = \log_3 x$
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3

x	$t(x) = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} x$
$\frac{8}{27}$	-3
$\frac{4}{9}$	-2
$\frac{2}{3}$	-1
1	0
$\frac{3}{2}$	1
$\frac{9}{4}$	2
$\frac{27}{8}$	3

Si lo graficamos, obtenemos:



Los gráficos de las funciones de la forma $f(x)=\log_a x$, con $a>1$ tienen características comunes:

- Las curvas tienen la misma raíz y es el punto (1 ; 0).
- Las curvas son crecientes, y crecen tanto más rápido cuanto mayor sea la base.
- El dominio debe tomar valores positivos , es decir $Domf=\Re>0$
- La curva no corta al eje de las ordenadas, osea que tiene la misma asíntota y esta es ***x= 0***

Que consideraciones podemos hacer si la base esta comprendida entre 0 y 1, es decir $0<a<1$.

Veremos los gráficos, que representan las siguientes funciones logarítmicas:

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ y $m(x)=\log_{\frac{2}{3}} x$

Como podrás ver los gráficos de las funciones de la forma $f(x)=\log_a x$, con $0<a<1$ tienen características comunes:

- Las curvas tienen la misma raíz y es el punto (1; 0).
- Las curvas son decrecientes, y decrecen tanto más rápido cuanto menor sea la base.
- El dominio debe tomar valores positivos , es decir $Domf=\Re>0$
- La curva no corta al eje de las ordenadas, osea que tiene la misma asíntota y esta es ***x = 0***

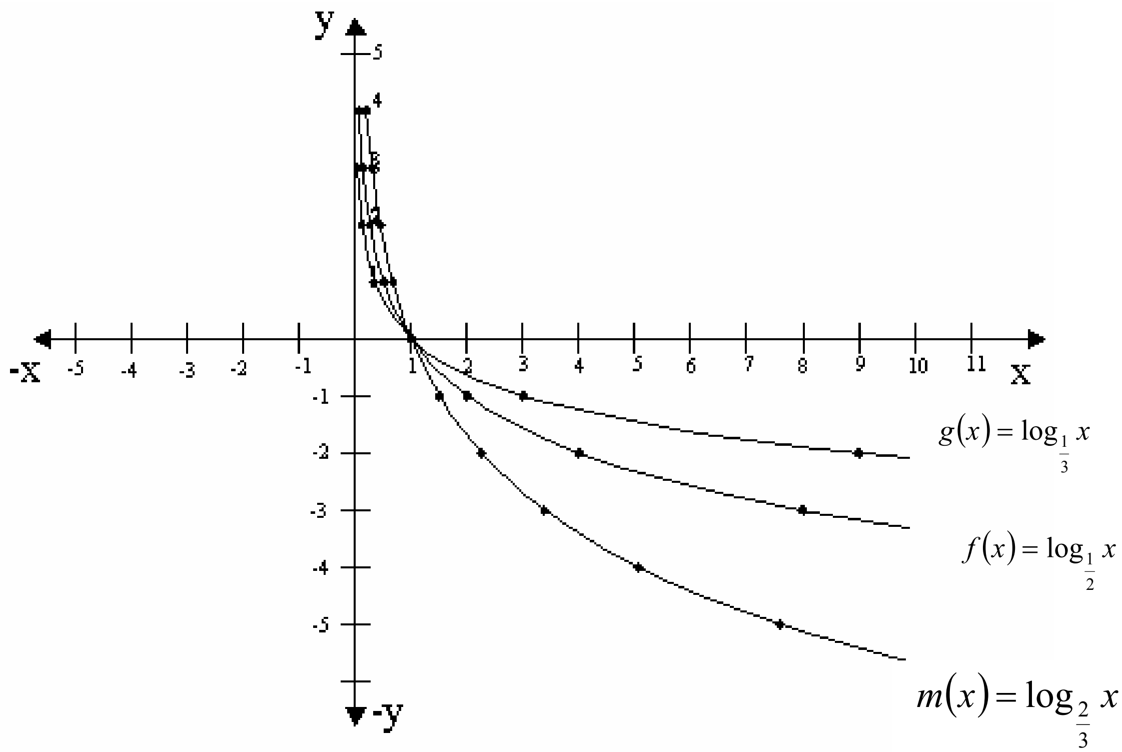


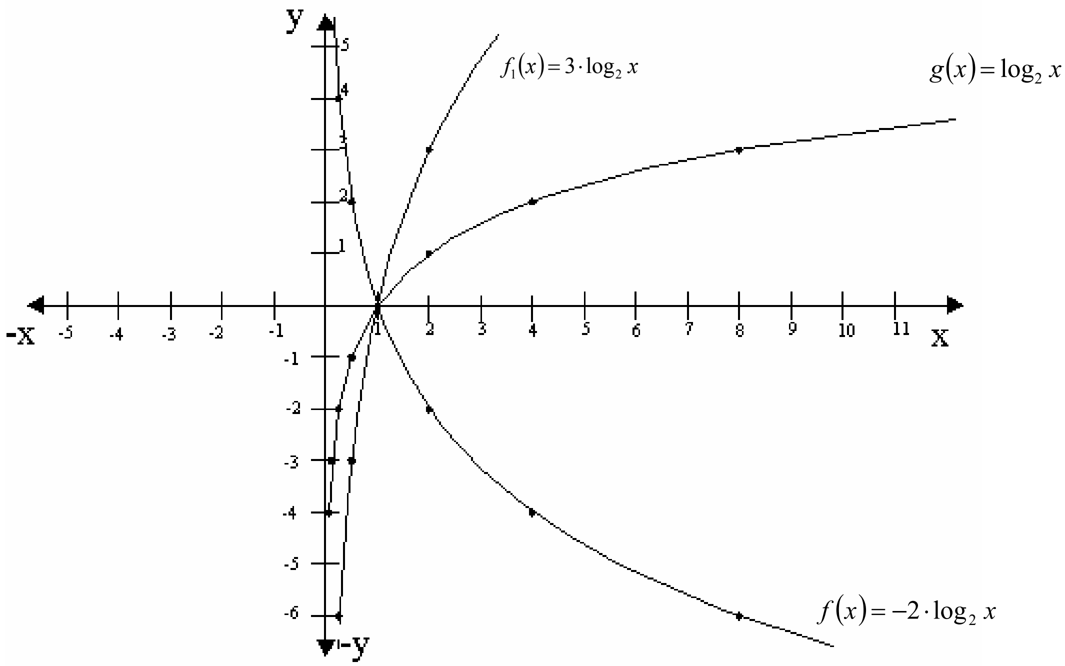
Gráfico de funciones de la forma $f(x)=k\cdot\log_a x$ **con** $a>1$ **y** $k>0$

Estudiaremos que influencia tiene el coeficiente de la función logarítmica (***k***), en la función $g(x)=\log_2 x$, con k igual a 5; 2; $\frac{1}{2}$.

Para ello haremos la siguiente tabla.

x	$g(x)=\log_2 x$	$f_1(x)=3\cdot\log_2 x$	$f(x)=-2\cdot\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3	-9	6
$\frac{1}{4}$	-2	-6	4
$\frac{1}{2}$	-1	-3	2
1	0	0	0
2	1	3	-2
4	2	6	-4
8	3	9	-6

Graficando, obtenemos



Si analizamos este gráfico, veremos que

- Las curvas tienen la misma raíz y es el $(0;1)$, o sea es la ordenada al origen
- Las curvas son decrecientes, y decrecen según el valor de ***k***
- El dominio es el conjunto de los números reales positivos, es decir, $Dom(f)=\Re>0$.
- Las curvas no cortan al eje de las ordenadas, por lo tanto no tienen ordenada al origen

Traslaciones de las funciones logarítmicas

Traslación vertical

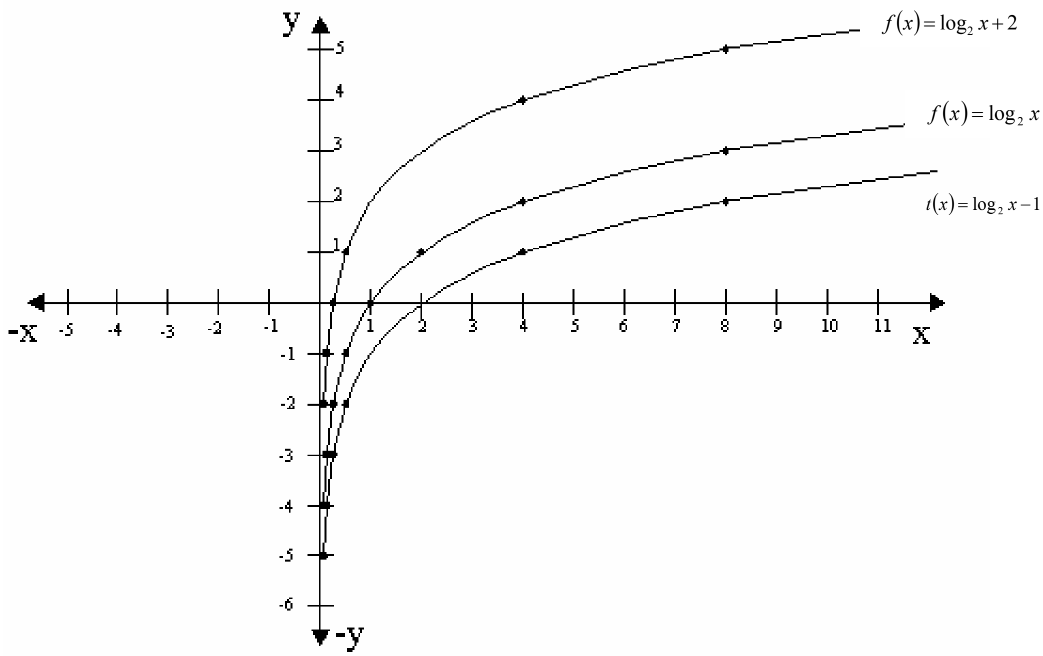
La función exponencial de la forma $f(x)=\log_a x+b$, es una traslación vertical de la función genérica $g(x)=\log_a x$.

Para ello graficaremos las siguientes funciones exponenciales: $f_1(x)=\log_2 x+2$; $f_2(x)=\log_2 x-1$, y su función genérica $f(x)=\log_2 x$.

X	$f(x)=\log_2 x$	$f_1(x)=\log_2 x+2$	$f_2(x)=\log_2 x-1$
$\frac{1}{8}$	-3	-1	-4
$\frac{1}{4}$	-2	0	-3
$\frac{1}{2}$	-1	1	-2

1	0	2	-1
2	1	3	0
4	2	4	1
8	3	5	2

Si graficamos estas funciones exponenciales, obtenemos:



Comparando los gráficos, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- La función se ha desplazado b unidades hacia arriba o abajo, no modificando su forma.
- La asíntota es la función $x=0$.
- El dominio es el conjunto de los números reales positivos, $Dom(f)=\Re>0$.
- Cambia el valor de la raíz.

Traslación horizontal

La función exponencial de la forma $f(x)=\log_a(x-c)$, es una traslación horizontal de la función genérica $g(x)=\log_a x$.

Para ello graficaremos las siguientes funciones exponenciales: $f_1(x)=\log_2(x-3)$; $f_2(x)=\log_2(x+2)$, y su función genérica $f(x)=\log_2 x$.

Para simplificar el gráfico, modificaremos, solamente, los valores de las abscisas para obtener el mismo valor de la función

x	$f(x)=\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2

x	$f_1(x)=\log_2(x-3)$
$\frac{25}{8}$	-3
$\frac{13}{4}$	-2

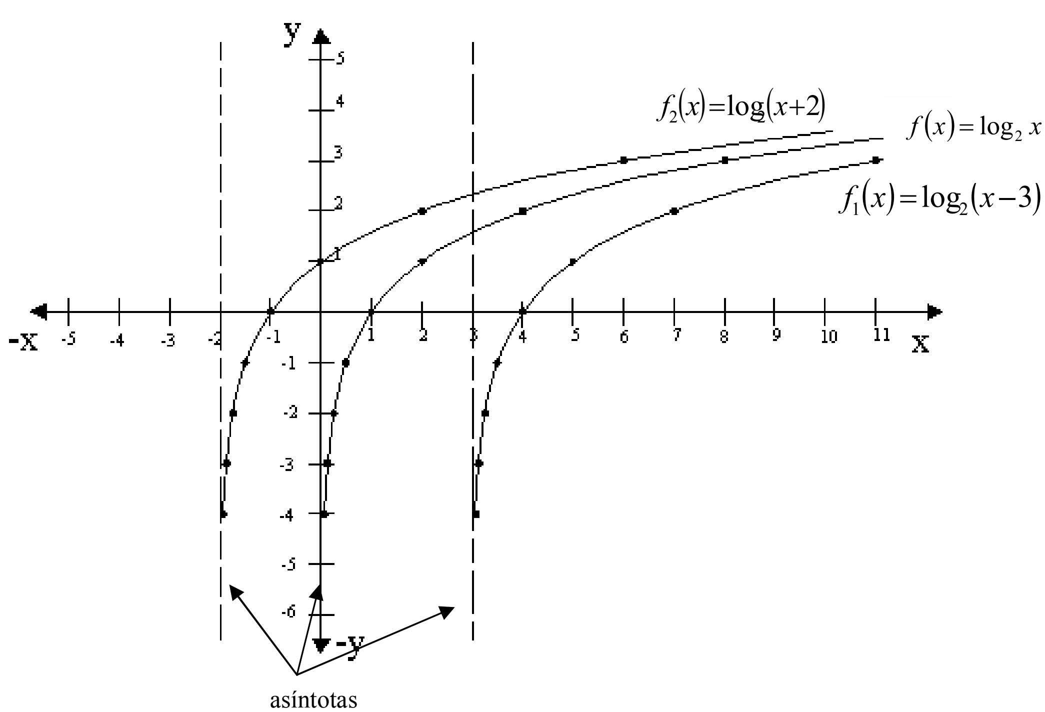
x	$f_2(x)=\log_2(x+2)$
$-\frac{15}{8}$	-3
$-\frac{7}{4}$	-2

$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$\frac{7}{2}$	-1
4	0
5	1
7	2
11	3

$-\frac{3}{2}$	-1
-1	0
0	1
2	2
6	3

Si graficamos estas funciones exponenciales, obtenemos:



Ahora, analizando los gráficos, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- La función se ha desplazado ***c*** unidades hacia la derecha o izquierda, en signo contrario al valor de ***c***, no modificando su forma.
- La asíntota es la función $x=-c$, por lo tanto no tiene raíces.
- El dominio es el conjunto de los números reales mayores a ***–c,*** $Dom(f)=\Re>-c$ y la imagen son los números reales**,** $\text{Im}(f)=\Re$.

Ejercicios

1. ¿Cómo sería una función logarítmica con dos desplazamientos, uno horizontal y el otro vertical?

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación en la que la incógnita es el argumento o la base de un logaritmo, se llama ***ecuación logarítmica****.*

Para resolverlas, tendremos presente que:

- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Solo existen logaritmos de números positivos, por lo cual se descartan como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Resolveremos ahora las siguientes ecuaciones:

1. $\log_2(x+1)=3$ — Aplicamos la definición de logaritmo

   $2^3 = x+1$

   $8 = x+1$ — Despejamos ***x***

   $8-1 = x$

   $x = 7$

2. $\log_2(x+1)+\log_2 x = 1$ — Por propiedad de la multiplicación

   $\log_2(x+1)\cdot x = 1$ — Aplicamos la definición de logaritmo

   $x\cdot(x+1) = 2^1$ — Aplicamos propiedad distributiva con respecto a la suma

   $x^2+x = 2$

   $x^2+x-2 = 0$ — Resuelvo la ecuación de segundo grado

   $$\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2.1}$$

   $$\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$$

   $$\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} = \frac{-1\pm 3}{2}$$

   $$x_1 = \frac{-1-3}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2}$$

   $$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$$

   Descartamos a x_1, porqué no existe un logaritmo de un número negativo, por lo tanto la solución es $x_2 = 1$.

3. $\log_2(x+7)-\log_2(x+1) = 4$ — Por propiedad de la división

   $$\log_2\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = 4$$

   $$\frac{x+7}{x+1} = 2^4$$ — Aplicamos la definición

$$\frac{x+7}{x+1}=16$$ Despejamos $\boldsymbol{x}$

$$x+7=16\cdot(x+1)$$

$$x+7=16x+16$$

$$x-16x=16-7$$

$$-15x=9$$

$$x=-\frac{9}{15}$$

$$x=-\frac{3}{5}$$

4. $\log(2x+1)=\log(x+2)$

   Como en una función logarítmica dos valores distintos del dominio siempre tienen imágenes distintas, en la ecuación, los logaritmos de igual base sólo pueden ser iguales si los argumentos son iguales, por lo tanto:

   $$2x+1=x+2$$

   $$2x-x=2-1$$ Despejamos $\boldsymbol{x}$

   $$x=1$$

5. $2\cdot\log_5 x+\log_5 8x=3$ Aplicamos las propiedades de la potencia y la multiplicación

   $$\log_5 x^2+\log_5 8x=3$$

   $$\log_5\left(x^2\cdot 8x\right)=3$$

   $$8x^3=5^3$$ Aplicamos la definición

   $$x^3=\frac{125}{8}$$ Despejamos $\boldsymbol{x}$

   $$x=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$$

   $$x=\frac{5}{3}$$

6. $\log_3 x+\log_9 x=1$

   Aplicamos el cambio de base al logaritmo que tenemos en base 9, para pasarlo a base 3:

   $$\log_9 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 9}$$

   $$\log_9 x=\frac{\log_3 x}{2}$$

   Reemplazamos y resolvemos

$$\log_3 x - \frac{1}{2} \cdot \log_3 x = 1$$

$$\log_3 x - \log_3 \sqrt{x} = 1$$

Aplicamos las propiedades de la división y radicación

$$\log_3 \frac{x}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = 3^1$$

Racionalizamos el denominador

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 3^2$$

Despejamos ***x***

$$x = 9$$

Aplicaciones de la función logarítmica

Sustancias radiactivas

La reducción de la masa por la desintegración radiactiva de ciertas sustancias, como el carbono-14, se describe mediante funciones exponenciales.
Con la ayuda de los logaritmos, ahora podemos resolver la ecuación, que sirve para averiguar la edad de un fósil, ya que la función representativa es $M = M_o \cdot 0{,}866^t$, donde M (en gramos) es la cantidad de carbono-14 que queda, M_o es la masa inicial y t es el tiempo transcurrido, expresado en miles de años.
Por ejemplo:
Se ha encontrado un fósil con 100 gramos de carbono-14 y contenía 200 gramos del mismo cuando estaba vivo, ¿calcular la edad aproximada del fósil?
Si planteamos la ecuación

$$M = M_o \cdot 0{,}866^t$$

$$100 = 200 \cdot 0{,}866^t$$

$$\frac{100}{200} = 0{,}866^t$$

$$\log \frac{1}{2} = \log\left(0{,}866^t\right)$$

$$\log \frac{1}{2} = t \cdot \log 0{,}866$$

$$t = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 0{,}866}$$

$$t = 4{,}81785$$

Si redondeamos el valor de t, podemos decir ***t = 4818 años***.
Este valor se denomina ***período de desintegración***, que es el tiempo que tardó la masa inicial del carbono-14 en reducirse a la mitad.

Intensidad sísmica

La escala de Richter, utilizada para medir la intensidad de los terremotos, es una escala logarítmica de base 10.
La magnitud de un terremoto en esa escala está dada por la fórmula:

$$M = \log p$$

Donde ***M*** es el grado en la escala Richter y ***p*** es la potencia, qué indica cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda sísmica del terremoto en comparación con una onda de referencia correspondiente a la situación normal.
Por ejemplo, si un terremoto fue mayor que otro con una diferencia de 2 grados en la escala Richter, significa que su intensidad fue 10^2 veces mayor.

El factor pH y acidez de las soluciones

La concentración de iones de hidrógeno en una solución determina su grado de acidez.
Como se trata de cantidades muy pequeñas, se inventó una escala logarítmica que facilita su manejo.
La fórmula que relaciona el ***pH*** de una solución con la concentración de iones de hidrógeno es la siguiente:

$$pH = \log\left(\frac{1}{\left|H^+\right|}\right)$$

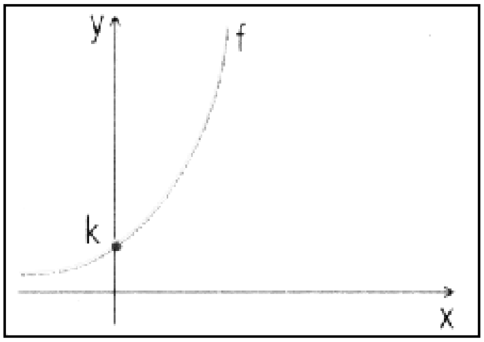
Donde $\left|H^+\right|$ representa los moles de iones de hidrógeno por litro.

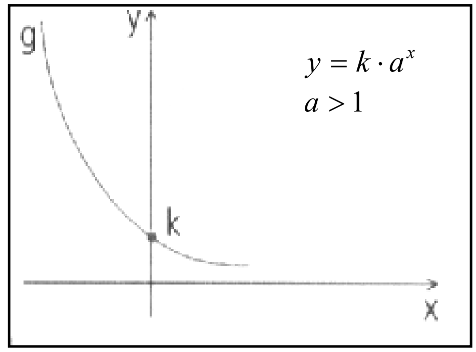
El agua tiene ***pH = 7*** y se la considera como ***neutra***. Si el factor es mayor que 7, se dice que la solución es ***básica***, sino será ácida, si el factor es menor que este.

Síntesis
Función exponencial

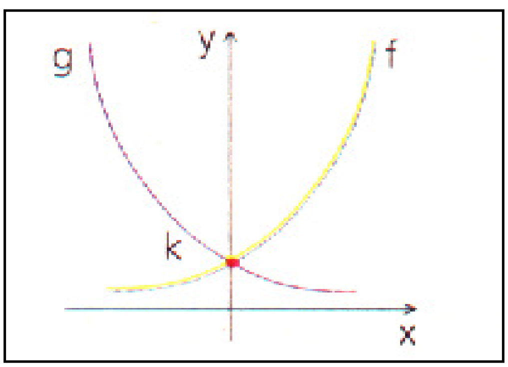
Son funciones de la forma $y = k \cdot a^x$ con $k \neq 0$; $a > 0$; $a \neq 1$; $a \wedge k \in \Re$, fijos.

- Gráficos
  Si $a > 1$ es creciente Si $a < 1$ es decreciente



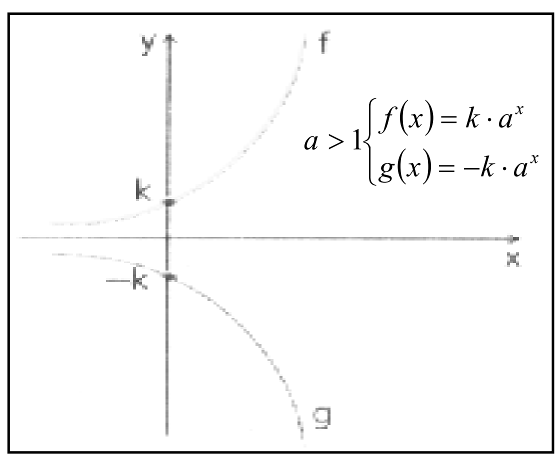


- Dominio: $\Re$
- Asíntota horizontal: $y = 0$ (eje y)
- Si las base son ***recíprocas***, las funciones son simétricas con respecto al eje de las ordenadas.



$$a > 1 \begin{cases} f(x) = k \cdot a^x \\ g(x) = k \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^x \end{cases}$$

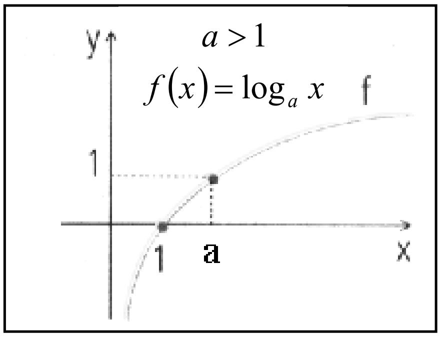
- Si los coeficientes son opuestos, las funciones son simétricas con respecto al eje de las abscisas.

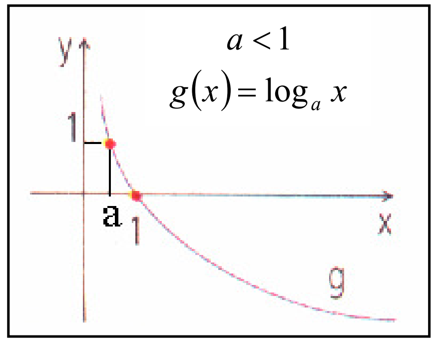


Función Logarítmica

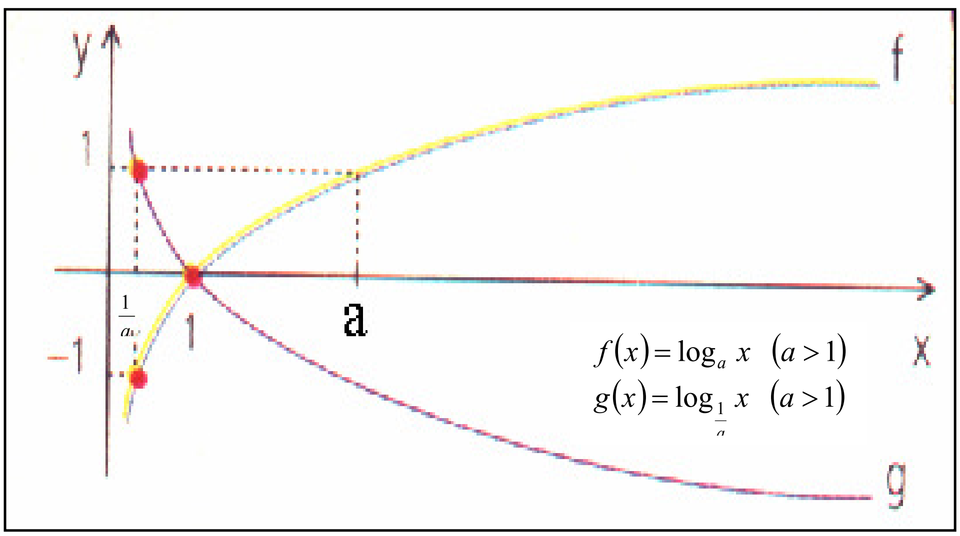
Son funciones de la forma $y = \log_a x$ con $x > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$; $b \in \Re$, fijos.

- Gráficos
  Si $a > 1$ es creciente Si $a < 1$ es decreciente

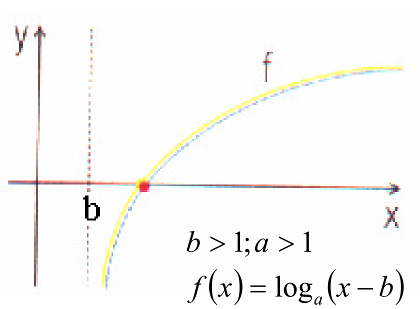


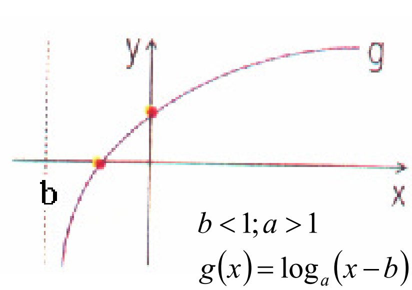


- Dominio: $\Re^+$, $(\Re > 0)$
- Asíntota vertical: $x = 0$ (eje x)
- Si las base son ***recíprocas***, las funciones son simétricas con respecto al eje de las abscisas.



- Desplazamiento horizontal: $y = \log_a (x - b)$
  Dominio: $\{x / x \in \Re \wedge x > b\}$
  Asíntota vertical: $x = b$





Logaritmos

Definición: $\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x$; $(a > 0;\ \ a \neq 1;\ x > 0)$

Propiedades:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
6. $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a x$

Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Logaritmo decimal: son los de base 10. Generalmente, la base no se escribe, es decir:

$$\log x = \log_{10} x$$

Logaritmo decimal: son los de base e, que es un número irracional. Se los escribe con ***Ln***, es decir:

$$Lnx = \log_e x$$

$$e = 2{,}71828....$$

Ecuaciones Exponenciales

- Son aquellas en las que la incógnita figura en al menos un exponente.
- En muchos casos resulta conveniente expresar ambos miembros como potencias de una misma base.
- Para despejar incógnitas que aparecen en el exponente, es útil usar logaritmos.
- Hay que tener en cuenta que cualquier logaritmo puede obtenerse con una calculadora científica.

Ecuaciones Logarítmicas

- Son las que tienen la incógnita en el argumento del logaritmo.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- En muchos casos resulta conveniente agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo tanto deben descartarse como soluciones los valores que no puedan ser verificados en la ecuación original.