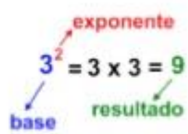
POTENCIACIÓN

La potenciación es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$

Base: La base de una potencia es el número que multiplicamos por sí mismo, en este caso el 7.

Exponente: El exponente de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base, en el ejemplo es el 4.



Se lee, tres elevado al cuadrado es igual a nueve. El **exponente** nos indica cuantas veces se multiplica la base, en este caso el 3, dos veces. Si el exponente viera sido 4, el resultado daría $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

Cuando hay ejercicios en donde aparecen varias potencias de la misma base, existen algunas reglas que es muy importante conocer.

Propiedades de la Potenciación

- **Producto de Potencia de igual base**:

$a^2 \times a^3 \times a = a^6$

Como observamos, los exponentes se suman en el caso de productos de igual base. La última "a", al no estar sin exponente visible, significa que esta elevada a la uno. $2 + 3 + 1 = 6$

- **Cociente de potencias de igual base.**

$a^9 / a^7 = a^2$

En este caso los exponentes se restan. $9 - 7 = 2$

Aclaramos que si las bases serían diferentes, ninguna de las dos propiedades se podría concretar. Deben ser obligatoriamente de la misma base.

$a^3 \times b^2 = a^3 \times b^2$

En este ejemplo, quedan igual ya que como se dijo, son de bases distintas y no se puede hacer absolutamente nada.

- **Suma:**

En el caso de suma o resta los exponentes permanecen inalterados. Si son iguales el resultado queda con el mismo exponente, solo varía la cantidad, ejemplo.

$a^2 + a^2 = 2\ a^2$

Como observamos, son dos "a" elevadas al cuadrado. Solo las sumamos, dándonos 2 a^2. Podemos sumar, ya que las bases son iguales, pero como se dijo anteriormente, los exponentes no varían como en el caso del producto o cociente. Lo mismo pasa en la resta.

$6\ b^3 - 4\ b^3 = 2\ b^3$

Solo tenemos en cuenta el número que esta adelante, que es el que nos indica la cantidad.

- **Potencia de Potencia**.

Esta propiedad se presenta cuando tenemos una potencia que a su vez esta elevada a otra potencia.

$(a^2)^3 = a^6$ (a elevada a la 6).

Aclaramos que las letras son ejemplos de lo que pasaría también con los números. A veces nos podemos encontrar con ejercicios que tienen productos y cocientes a la vez.

$a^2 \times a^3\ /\ a \times a^2$

En este caso sumamos los exponentes del producto del numerador y aparte sumamos los exponentes del producto que figura en el denominador, quedándonos un cociente simple.

$a^5 / a^3 = a^2$

El resultado final es a^2.

- **Exponente cero**

Todo número elevado a la cero es igual a 1

$a^0=1$ $a \neq 0$

$6^0=1$

$6^0=1$

- **Exponente igual a 1**

Todo número elevado a n=1 es igual a si mismo

$a^1=a$

$5^1=5$

$4^1=4$

Producto de potencias de igual exponente

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el resultado del producto de las bases.

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

$2^5 \cdot 4^5 = 8^5$

Potencia de exponente negativo

La potencia de un número entero con exponente negativo es igual al inverso del número elevado a exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } a \neq 0$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \frac{125}{8}$$

Aquí les dejamos algunos ejemplos resueltos en donde se aplican algunas de las propiedades que explicamos con números.

$$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4 = 625$$

$$3^3 \times 3^6 \times \frac{3^{12}}{3^8} = 3^9 \times 3^{12-8} = 3^9 \times 3^4 = 3^{13} = 1594323$$

$$2^3 - 3^3 = 8 - 27 = -19$$

$$2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216$$

$$2^3 - 7^2 + \frac{3^6}{3^4} = 8 - 49 + 3^2 = 8 - 49 + 9 = -32$$

Signo de una potencia de base entera

Para determinar el **signo** de la **potencia de un número entero** tendremos en cuenta que:

1. Las **potencias de exponente par** son siempre **positivas**.

$$(+)^{par} = +$$
$$(-)^{par} = +$$

$2^6 = 64$

$(-2)^6 = 64$

2. Las **potencias de exponente impar** tiene el **mismo signo** de la **base**.

$$(+)^{\text{impar}} = +$$
$$(-)^{\text{impar}} = -$$

$2^3 = 8$

$(-2)^3 = -8$

RADICACIÓN

En matemática, la **radicación** de orden *n* de un número *a* es cualquier número *b* tal que $b^n = a$, donde *n* se llama índice u orden, *a* se denomina radicando, y *b* es una **raíz enésima**, por lo que se suele conocer también con ese nombre. La notación a seguir tiene varias formas:

(1) $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Para todo *n* natural, *a* y *b* reales positivos, se tiene la equivalencia:

(2) $a = b^n \iff b = \sqrt[n]{a}$.

La raíz de orden dos se llama raíz cuadrada y, por ser la más frecuente, se escribe sin superíndice: $\sqrt{x}$ en vez de $\sqrt[2]{x}$. La raíz de orden tres se llama raíz cúbica.

Dentro de los números reales $\mathbb{R}^+$ positivos, siempre puede encontrarse una única raíz enésima también positiva. Si el número *a* es negativo entonces sólo existirá una raíz real cuando el índice *n* sea impar[2] . La raíz enésima de un número negativo no es un número real (no está definida dentro de los números reales) cuando el índice *n* es par.

La radicación es en realidad otra forma de expresar una potenciación: la raíz de cierto orden de un número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa. Por esto, las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación. Para que estas propiedades se cumplan, se exige que el radicando de las raíces sea positivo.

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Y consiste en que dados dos números, llamados radicando e índice, hallar un tercero, llamado raíz, tal que, elevado al índice, sea igual alradicando.

$\sqrt[\text{índice}]{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$

En la raíz cuadrada el índice es 2, aunque en este caso se omite. Consistiría en hallar un número conocido su cuadrado.

$\sqrt{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$

La raíz cuadrada de un número, a, es exacta cuando encontramos un número, b, que elevado al cuadrado es igual al radicando: $b^2 = a$.

$\sqrt{25} = 5$

Propiedades de la potenciación

Como se indica con la igualdad de la raíz $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, la radicación es en realidad otra forma de expresar una potenciación: la raíz de cierto orden de un número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa. Por esto, las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación. Para que estas propiedades se cumplan, se exige que el radicando de las raíces sea positivo.

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores nombrados anteriormente.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo

- $\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12.$$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$

Cuando esta propiedad se aplica a números, no hace falta pasar la raíz a potencia de exponente racional, aunque sí cuando se hace con variables.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^9}} = \frac{x^{3/3}}{y^{9/3}} = \frac{x}{y^3}.$
- $(\sqrt[4]{a^2})^8 = (\ a^{2/4})^8 = \sqrt[4]{a^{16}}.$

Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}.$$

Ejemplo

- $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}.$

Potencia de una raíz

Para calcular la potencia de una raíz se eleva el radicando a esa potencia.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo

si 3 y 4

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}.$$

Otras propiedades

Utilizando las propiedades fundamentales, se pueden obtener otras propiedades interesantes, como por ejemplo, el cálculo de la raíz de un producto con el mismo radicando y distintos índices, que se obtiene multiplicando los índices de las raíces y conservando el radicando elevado a la suma de los índices.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{m+n}}.$$

Potenciación	Radicación	Radicando	Indice	Raíz
$2^5 = 32$	$\sqrt[5]{32} = 2$	32	5	2
		64	2	
	$\sqrt[3]{216} =$			
			5	3
	$\sqrt{144} =$			

1) Realiza las siguientes operaciones. (8 puntos)

a) $\sqrt{36 \cdot 81} + \sqrt{9+16}$

b) $2 \cdot (5^2 - 12^2 : 4^2 - \sqrt{49})$

c) $41 - (2^3 - 2^2) - 6 \cdot \sqrt{16}$

d) $2 \cdot 3 \cdot (5 + 2^5 : 2^2) - 31$

e) $3^5 - (4 \cdot 3 - 7) : 5 \cdot 2$

f) $\sqrt{25} - 2(\sqrt{81} - \sqrt{36}) : 3$

g) $3^5 : (3^4 : 3^2) - (\sqrt{144} + 2^0)$

h) $25^3 : 5^3 - (10 : 2)^3$